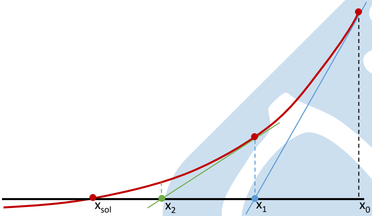
# Méthode de Newton

Renaud Costadoat
Lycée Dorian

# Développement de Taylor

Hypothèses de départ:

- $f$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$,
- $f$ s'annule en un unique point de $[a, b]$, que l'on notera $x_{sol}$,
- $f$ une fonction dérivable sur $[a, b]$,
- $f'$ ne s'annule pas sur $[a, b]$.




*Definition*

Théorème du développement de Taylor à l'ordre 1.

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $u \in I$. Le développement de Taylor à l'ordre 1 de $f$ est donné par:

$$f(x) = f(u) + f'(u).(x - u) + o(x - u)$$

Géométriquement, lorsqu'on néglige le reste, le développement de Taylor donne l'équation de la tangente en $u$. L'intersection de cette tangente avec l'axe $(O, \overrightarrow{x})$ tend vers $x_{sol}$.

# Démarche

Notons $\Delta(x)$ cette équation, l'abscisse $c$ de l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses est donnée par la résolution de $\Delta(c) = 0() \Leftrightarrow f(u) + f'(u).(c - u) = 0 \Leftrightarrow c = u - \dfrac{f(u)}{f'(u)}$.

**Pseudo code:**

1. Soit $x_0$, un réel dans $I$,
2. La tangente à $Cf$ au point d'abscisse $x_0$, a pour équation $y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$,
3. $x_1$ est le réel vérifiant: $f'(x_0).(x_1 - x_0) + f(x_0) = 0$, ainsi $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$,
4. Récurrence: le réel $x_n$ étant construit, calculer $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

**Conditions d'arrêt**

- lorsque l'écart entre deux termes consécutifs est inférieur à une valeur définie,
- lorsque l'image du milieu de notre intervalle par $f$ est inférieur à une valeur définie,
- lorsque le nombre d'itérations est supérieur à un nombre défini.

Le dernier terme $x_n$ sera une approximation de $x_{sol}$.

## Code python

Proposer le code python de la fonction `methode_Newton` .

## Code python

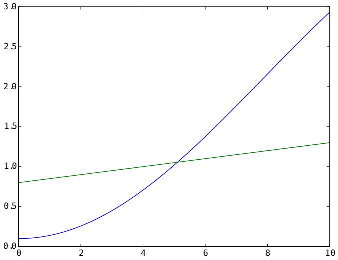
Proposer le code python de la fonction `methode_Newton` .

```
def methode_Newton(f,df,a,p) :
    x0=a
    while abs(f(x0))>p : # ou abs(e)>p
        x1=x0-f(x0)/df(x0)
        e=x1-x0
        x0=x1
    return x1
```

# Exercice

Déterminer en utilisant Python le point d'intersection des deux fonctions suivantes sur l'intervalle $[0, 10]$.

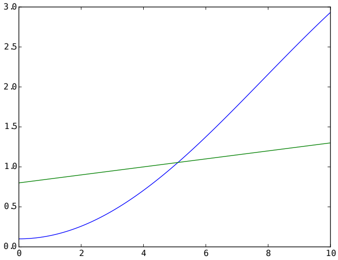
- $f_1(x) = -2.cos(\frac{x}{5}) + 2,1,$
- $f_2(x) = 0,05.x + 0,8.$



# Exercice

Déterminer en utilisant Python le point d'intersection des deux fonctions suivantes sur l'intervalle $[0, 10]$.

- $f_1(x) = -2.cos(\frac{x}{5}) + 2,1$,
- $f_2(x) = 0,05.x + 0,8$.




```
def f(x):
    return -2*np.cos(x/5)+2.1-(0.05*x+0.8)
def df(x):
    return 2/5.*np.sin(x/5)-(0.05)

print(methode_Newton(f,df,a,p))
```

## Comparaison des deux méthodes

Deux critères permettent de déterminer l'efficacité des deux méthodes.

- **Rapidité de convergence:** Dans les hypothèses où les deux méthodes convergent, la méthode de Newton converge plus « rapidement ». Exemple dans le cas précédent `(résultat, nombre d'itérations) :`

```
(5.1059522149400793, 5)
(5.105952024459839, 25)
```

- **Hypothèses et fonctions étudiées:** Sur ce critère, la méthode est moins contraignante, de plus, il n'est pas nécessaire avec la méthode de la dichotomie de déterminer la dérivée de la fonction.